CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

1984

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*

La deuxième partie est indépendante de la première.

PREMIÈRE PARTIE

Soit T un nombre réel > 0. Soient $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels.

On étudie dans cette première partie les séries de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n$$

où $u_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$

$u_n(x) = a_n \cos\left(\dfrac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} nx\right)$ pour n entier $\geqslant 1$, x réel.

On définit $S_0 = u_0$ et pour tout n entier $\geqslant 1$

$$S_n = S_{n-1} + u_n .$$

I.1. On suppose que pour tout x réel, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est convergente, de somme $f(x)$. (On dit alors que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est simplement convergente.)

Montrer qu'alors la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$ est périodique et admet T pour période.

I.2. *a.* Soit n un entier fixé $\geqslant 1$. Quel est le maximum de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \left| a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right| ?$$

b. Montrer que si la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est convergente, pour tout x réel, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est convergente.

(On énoncera soigneusement le (ou les) théorème(s) utilisé(s).)

c. Sous l'hypothèse de I.2.*b.*, montrer si $f(x)$ désigne la somme de $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$ est continue.

(On énoncera soigneusement le (ou les) théorème(s) utilisé(s).)

d. Les mêmes conclusions que dans I.2.*b.* et I.2.*c.* sont elles encore valables

si *i.* la série $\sum_{n\geqslant 1} (|a_n| + |b_n|)$ est convergente ?

ou si *ii.* la série $\sum_{n\geqslant 1} (\sup(|a_n|, |b_n|))$ est convergente ?

I.3. Montrer que si la série $\sum_{n \geqslant 1} n\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est convergente, la somme f de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire admet une fonction dérivée continue.
(On énoncera soigneusement le (ou les) théorème(s) utilisé(s).)

I.4. Énoncer une condition suffisante du type donné dans I.3. pour que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ soit de classe $\mathcal{C}^p$ (p entier $\geqslant 1$), c'est-à-dire admettre une fonction dérivée p-ième continue.
(Justifier soigneusement.)

I.5. *a.* On définit $U_0(x) = \frac{a_0}{2}$, et pour tout n entier $\geqslant 1$.

$$U_n(x) = U_{n-1}(x) + a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

(C'est-à-dire :

$$U_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + a_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{T}x\right) + \ldots + a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).)$$

Montrer qu'il existe $(n+1)$ constantes réelles $k_0, k_1, \ldots, k_n$ qu'on déterminera telles que

$$2U_n(x) \sin\left(\frac{\pi}{T}x\right) = k_0(a_0 - a_1) \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) + k_1(a_1 - a_2) \sin\left(3\frac{\pi x}{T}\right) + \ldots$$
$$\ldots + k_{n-1}(a_{n-1} - a_n) \sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{T}\right] + k_n a_n \sin\left[(2n+1)\frac{\pi x}{T}\right].$$

b. Montrer que si la suite $\{a_n\}_{n>0}$ est convergente, la série $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ où $w_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout n entier $\geqslant 0$, est convergente.

c. Montrer que si la suite $\{a_n\}_{n>0}$ est à termes positifs, décroissante, et tend vers 0 quand n tend vers l'infini, pour tout x réel, la suite

$$\left\{U_n(x) \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)\right\}_{n>0}$$

est convergente.

d. Montrer que si les deux suites $\{a_n\}_{n>0}$ et $\{b_n\}_{n>1}$ sont à termes positifs, décroissantes et tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, pour tout x réel, $x \neq kT$ (k entier relatif), la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$ est convergente.

e. Soit α un nombre réel $\left(0 < \alpha < \frac{T}{2}\right)$. Soit k un entier relatif. Montrer que sous les hypothèses de la question I.5.*d.* la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur l'intervalle

$$[kT + \alpha,\ (k+1)\,T - \alpha].$$

I.6. Soient n et p des entiers $\geqslant 0$. Calculer

a. $\int_0^T \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \cos\left(p\frac{2\pi}{T}x\right) dx,$

b. $\int_0^T \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \sin\left(p\frac{2\pi}{T}x\right) dx,$

c. $\int_0^T \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \sin\left(p\frac{2\pi}{T}x\right) dx.$

I.7. On suppose que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est convergente. On désigne, pour tout x réel, par $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$. Soient p et q des entiers, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$.

a. Montrer que la suite numérique

$$\left\{ \int_0^T S_n(x) \cos\left(p \frac{2\pi}{T} x\right) dx \right\}_{n \geqslant 0}$$

converge quand n tend vers l'infini vers :

$$\int_0^T f(x) \cos\left(p \frac{2\pi}{T} x\right) dx.$$

Montrer que la suite numérique :

$$\left\{ \int_0^T S_n(x) \sin\left(q \frac{2\pi}{T} x\right) dx \right\}_{n \geqslant 0}$$

converge quand n tend vers l'infini vers :

$$\int_0^T f(x) \sin\left(q \frac{2\pi}{T} x\right) dx.$$

(On énoncera soigneusement le (ou les) théorème(s) utilisé(s).)

b. Pour tout n entier $\geqslant 0$, pour tout p entier $\geqslant 0$, pour tout q entier $\geqslant 1$, calculer :

$$\int_0^T S_n(x) \cos\left(p \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

et

$$\int_0^T S_n(x) \sin\left(q \frac{2\pi}{T} x\right) dx.$$

c. Déduire des questions précédentes la valeur de a_p (p entier $\geqslant 0$) en fonction de

$$\int_0^T f(x) \cos\left(p \frac{2\pi}{T} x\right) dx$$

et la valeur de b_q (q entier $\geqslant 1$) en fonction de

$$\int_0^T f(x) \sin\left(q \frac{2\pi}{T} x\right) dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on examine certaines applications du théorème suivant, qu'on admettra.

Théorème :

Soit f une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

a. Que f est périodique et admet 1 pour période;

b. Que f est monotone par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe k entier $\geqslant 1$ et $(k+1)$ nombres réels

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k = 1$$

avec $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$

tels que la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ soit monotone.

Alors :

a. La restriction de f à tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est intégrable;

b. En tout point x de $\mathbb{R}$, f admet une limite à gauche (notée $f(x^-)$).
et une limite à droite (notée $f(x^+)$);

c. En tout point x de $\mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$

(où $u_0(x) = \frac{a_0}{2}$ et pour tout n entier $\geqslant 1$

$u_n(x) = a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$

avec $\quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)\,dx \qquad n \geqslant 0$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\,dx \qquad n \geqslant 1)$$

est convergente et a pour somme $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Par définition on dit que les a_n et les b_n sont les coefficients de Fourier de f.

II.1. Soit f_1 la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1, telle que pour $0 < x < 1 \qquad f_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ et telle que $f_1(0) = 0$.

a. Calculer les coefficients de Fourier de f_1.

b. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

c. En déduire la somme de la série :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

II.2. Soit f_2 la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1, telle que pour $0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad f_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$.

a. Calculer les coefficients de Fourier de f_2.

b. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

c. Calculer la somme des séries :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

II.3. *a.* Montrer que les trois égalités :

$$B_0(x) = 1$$

$$B_k'(x) = k\,B_{k-1}(x) \qquad \text{pour tout entier } k \geqslant 1$$

$$B_k(1) = B_k(0) \qquad \text{pour tout entier } k \geqslant 2$$

définissent de façon unique une suite de polynômes $\{B_k\}_{k \geqslant 0}$ à coefficients rationnels.

b. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3 et B_4.

II.4. Soit f_3 la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1 telle que pour $0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad f_3(x) = B_3(x)$. Calculer les coefficients de Fourier de f_3.

II.5. Soit f_4 la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1 telle que pour $0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad f_4(x) = B_4(x)$. Calculer les coefficients de Fourier de f_4.

II.6. Soit k un entier $\geqslant 0$. Soit f_k la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 1 telle que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ $f_k(x) = B_k(x)$.

a. Soit p un entier $\geqslant 1$. Calculer les coefficients du Fourier de f_{2p}.

b. Soit p un entier $\geqslant 0$. Calculer les coefficients de Fourier de f_{2p+1}.

c. Soit p un entier $\geqslant 1$. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de $B_{2p}(0)$.